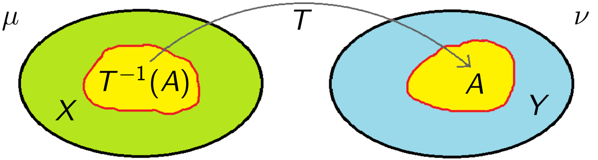
Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

Wykład 12

Zamiana zmiennych w całce i przechodzenie z granicą pod całkę

Niech $(X, \mathcal{F}_X, \mu)$ i $(Y, \mathcal{F}_Y, \nu)$ przestrzenie z miarą i niech $T : X \to Y$ odwozorowanie mierzalne.



Obrazem miary μ jest miara $T(\mu)$ na $\mathcal{F}_Y$, gdzie $T(\mu)(A) = \mu(T^{-1}(A))$.

Tw. (abstrakcyjna zamiana zmiennych)

$f \in \mathcal{L}(T(\mu))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \circ T \in \mathcal{L}(\mu)$ oraz

$$\forall_{f \in \mathcal{L}(T(\mu))} \qquad \int_Y f \, dT(\mu) = \int_X f \circ T \, d\mu.$$

Często pisze się $\mu \circ T^{-1} := T(\mu)$

Dowód: **(1)** Jeśli $f \geqslant 0$ prosta, to $f = \sum_{i=1}^n y_i \mathbb{1}_{A_i}$, $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{F}_Y$, i

$$\int_Y f \, dT(\mu) = \sum_{i=1}^n y_i T(\mu)(A_i) = \sum_{i=1}^n y_i \mu(T^{-1}(A_i))$$

$$= \int_X \sum_{i=1}^n y_i \mathbb{1}_{T^{-1}(A_i)} d\mu \overset{\mathbb{1}_A \circ T = \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}}{=\!=\!=} \int_X \left(\sum_{i=1}^n y_i \mathbb{1}_{A_i} \right) \circ T \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

(2) Jeżeli $f \geqslant 0$ mierzalna, to istnieją funkcje proste $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{F})$ takie, że $0 \leqslant f_n \nearrow f$ i wtedy także $f_n \circ T \nearrow f \circ T$. Stąd

$$\int_Y f\, dT(\mu) \overset{Levi}{=} \lim_{n\to\infty} \int_Y f_n\, T(\mu) \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \overset{Levi}{=} \int_X f\, d\mu.$$

(3) Jeżeli $f : Y \to \mathbb{R}$ dowolna mierzalna, to

$$f \in \mathcal{L}(T(\mu)) \iff \int_Y |f|\, dT(\mu) < \infty \overset{(2)}{\iff} \int_X |f|\, d\mu < \infty$$
$$\iff f \in \mathcal{L}(\mu).$$

Jeśli to zachodzi, to

$$\begin{aligned} \int_Y f\, dT(\mu) &= \int_Y f^+\, dT(\mu) - \int_Y f^-\, dT(\mu) \\ &\overset{(2)}{=} \int_X f^+ \circ T\, d\mu - \int_X f^- \circ T\, d\mu \\ &= \int_X (f\circ T)^+\, d\mu - \int_X (f\circ T)^-\, d\mu = \int_X f \circ T\, d\mu. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Wn1. Jeśli $T(\mu) \ll \nu$, to $\int_X f \circ T\, d\mu = \int_Y f\, \frac{dT(\mu)}{d\nu}\, d\nu$ dla $f \circ T \in \mathcal{L}(\mu)$

Wn2. Jeśli T odwracalne, T^{-1} mierzalne oraz $T^{-1}(\nu) \ll \mu$, to

$$\int_Y f(y)\, d\nu = \int_X f(T(x))\, dT^{-1}(\nu) = \int_X f(T(x)) \cdot \frac{dT^{-1}(\nu)}{d\mu}(x)\, d\mu$$

dla każdej ν-całkowalnej funkcji $f : Y \to \mathbb{R}$.

Wn3. Jeśli $g : [a,b] \to [c,d]$ różniczkowalna, rosnąca i na, to
$$\int_c^d f(y)\,dy = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$$
dla każdej funkcji $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ całkowalnej w sensie Lebesgue'a.

Dowód: Traktując $g : [a,b] \to [c,d]$ jako 'dystrybuantę' otrzymujemy miarę Lebesgue'a-Stieltjesa λ_g na $[a,b]$; wyznaczoną przez warunek $\lambda_g([a',b')) = g(b') - g(a')$. Ponadto $g^{-1}(\lambda) = \lambda_g$, gdyż
$$\begin{aligned} g^{-1}(\lambda)([a',b')) &= \lambda\big(g([a',b'))\big) = \lambda\big([g(a'),g(b'))\big) \\ &= g(b') - g(a') = \lambda_g([a',b')). \end{aligned}$$
Skoro g różniczkowalna, to $\lambda_g \ll \lambda$ na $[a,b]$ oraz $\frac{d\lambda_g}{d\lambda} = g'$. Stąd
$$\begin{aligned} \int_c^d f(y)\,dy &= \int_c^d f(y)\,d\lambda \overset{\textbf{Wn2}}{=} \int_a^b f(g(x)) \cdot \tfrac{dg^{-1}(\lambda)}{d\lambda}(x)\,d\lambda \\ &= \int_a^b f(g(x)) \cdot \tfrac{d\lambda_g}{d\lambda}(x)\,d\lambda = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,d\lambda. \end{aligned}$$
■

Uw. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ niemalejąca, lewostronnie ciągła $\Longrightarrow \lambda_F = F^{-1}(\lambda)$
gdzie $F^{-1}(y) := \inf\{x \in \mathbb{R} : y \leqslant F(x)\}$ **funkcja kwantylowa**

Wn4. Jeśli $g : U \to V$ dyfeomorfizm, gdzie $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ zbiory otwarte, to dla każdej λ^n-całkowalnej funkcji $f : V \to \mathbb{R}$

$$\int_V f(y)\, dy = \int_U f(g(x))|\det(J_g)(x)|\, dx$$

gdzie $x, y \in \mathbb{R}^n$ wektory i $J_g = [\frac{\partial g_i}{\partial x_j}]_{i,j=1}^n$ **macierz Jacobiego** funkcji g.

Dowód dla odwzorowania liniowego: Jeśli g jest odwzorowaniem liniowym, to ma stałą pochodną. Mianowicie $g'(x) = g$, dla $x \in U$, czyli możemy utożsamić g z macierzą J_g. Na mocy **Tw** z Wykładu 7

$$g^{-1}(\lambda^n) = |\det(g)|\lambda^n = |\det(J_g)|\lambda^n$$

(g^{-1} istnieje i jest liniowe, bo g liniowe odwracalne). Stąd

$$\int_V f(y)\, dy = \int_V f(y)\, d\lambda^n \overset{\textbf{Wn2}}{=} \int_U f(g(x)) \cdot \frac{dg^{-1}(\lambda^n)}{d\lambda^n}(x)\, d\lambda^n$$

$$= \int_U f(g(x)) \cdot \frac{d|\det(J_g)|\lambda^n}{d\lambda^n}(x)\, d\lambda^n = \int_a f(g(x)) \cdot |\det(J_g)|\, d\lambda^n.$$

Dla dowolnego (niekoniecznie liniowego) g wykorzystać, że $g(x)$ lokalnie działa jak odwzorowanie liniowe $J_g(x)$! □

„pochodna w punkcie x, to najlepsze liniowe przybliżenie w x"

Prz. (współrzędne biegunowe) Rozważmy dyfeomorfizm $g : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ dany wzorem

$$g(r, \varphi) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi).$$

Wtedy $J_g = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}$ oraz $\det(J_g) = r$. Zatem z **Wn4**, dla dowolnej funkcji całkowalnej $f : V \to \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}^2$, mamy

$$\int_V f(x, y)\, dx\, dy = \int_{g^{-1}(V)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, dr\, d\varphi$$

Prz. Rozkładem zmiennej losowej $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ jest obraz $\xi(P)$ prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}$. Zmienna ξ ma rozkład ciągły $\iff \xi(P) \ll \lambda$ i wtedy $f := \frac{d\xi(P)}{d\lambda}$ nazywamy gęstością rozkładu zmiennej ξ. Dla dowolnej funkcji borelowskiej $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiej, że $h(\xi)$ ma wartość oczekiwaną

$$\mathbb{E}(h(\xi)) := \int_\Omega h(\xi)\, dP \overset{\textbf{Wn1}}{=} \int_\mathbb{R} h(x) f(x) dx.$$

Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ przestrzeń z miarą.

Twierdzenie o zbieżności monotonicznej

i) $\left(\begin{array}{c} \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(\mu) \\ f_n \nearrow f \end{array} \right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{l} f \in \mathcal{L}(\mu) \iff \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu < \infty \\ \text{i wtedy } \int_X f \, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \end{array} \right)$

ii) $\left(\begin{array}{c} \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(\mu) \\ f_n \searrow f \end{array} \right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{l} f \in \mathcal{L}(\mu) \iff \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu > -\infty \\ \text{i wtedy } \int_X f \, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \end{array} \right)$

Dowód: i) to w zasadzie Tw. Leviego. Rzeczywiście, zauważmy, że

$$0 \leqslant f_n - f_1 \nearrow f - f_1 \overset{Levi}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} \int_X f_n - f_1 \, d\mu = \int_X f - f_1 \, d\mu$$
$$\iff \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu - \int_X f_1 \, d\mu = \int_X f - f_1 \, d\mu$$

Zatem $f \in \mathcal{L}(\mu) \iff f - f_1 \in \mathcal{L}(\mu) \iff \int_X f - f_1 \, d\mu < \infty \iff \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu < \infty$. Ponadto, jeśli to zachodzi to

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

ii) wynika z i) poprzez przejści od $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ i f, do $\{-f_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $-f$. ∎

Twierdzenie o zbieżności zmajoryzowanej

$$\left(\begin{array}{c} \forall_n \ |f_n| \leqslant g \in \mathcal{L}(\mu) \\ f_n \to f \end{array} \right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(\mu), f \in \mathcal{L}(\mu) \\ \int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \\ \text{a nawet } \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0 \end{array} \right)$$

Dowód: Skoro $|f| = |\lim_{n\to\infty} f_n| = \lim_{n\to\infty} |f_n| \leqslant g$ i $g \in \mathcal{L}(\mu)$, to $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(\mu)$, $f \in \mathcal{L}(\mu)$ na mocy **Lem** Wykład 10. Ponadto

$$|f_n - f| \leqslant |f_n| + |f| \leqslant 2g \Longrightarrow 2g - |f_n - f| \geqslant 0$$

Zatem możemy zastosować Lemat Fatou do ciągu $|2g - |f_n - f|$. Stąd

$$\int_X 2g \, d\mu = \int_X 2g - \lim_{n\to\infty} |f_n - f| \, d\mu \overset{Fatou}{\leqslant} \liminf_{n\to\infty} \int_X 2g - |f_n - f| \, d\mu$$
$$= \liminf_{n\to\infty} \int_X 2g \, d\mu - \int_X |f_n - f| \, d\mu = \int_X 2g \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu.$$

skracając obie strony przez $\int_X 2g \, d\mu$ otrzymujemy

$$0 \geqslant - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu \Longleftrightarrow \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$$
$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

Stąd

$$\left|\int_X f_n\,d\mu - \int_X f\,d\mu\right| = \left|\int_X f_n - f\,d\mu\right| \leqslant \int_X |f_n - f|\,d\mu \to \infty.$$

Czyli $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$. ∎

Uw1. Poprzednie Tw pozostają prawdziwe jeśli zbieżność punktową zastąpić zbieżnością prawie wszędzie! Rzeczywiście, jeśli $f_n \overset{pw}{\to} f$ oraz $N := \{x : f_n(x) \not\to f(x)\}$, to $f_n \mathbb{1}_N \to f$ oraz $\int_X f_n \mathbb{1}_N\,d\mu = \int_X f_n\,d\mu$.

Uw2. Na ogół nie możemy wejść z granicą pod całkę, patrz Wykład 9.

Prz. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ oraz $f_n = n\mathbb{1}_{(0,1/n]}$. Wtedy

$$f_n \to 0 \quad \text{oraz} \quad \int_{/} [0,1] f_n\,d\lambda = n \cdot \lambda((0,1/n]) = n \cdot 1/n = 1.$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n\,d\lambda = 1 \neq 0 = \int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} f_n\,d\lambda.$$

W szczególności, nie istnieje całkowalna funkcja majoryzująca ciąg $\{f_n\}$.